DM n°2 à rendre pour le 1/10/18

Vous pouvez le chercher à deux et si c'est le cas sur la copie vous mettez vos deux noms et chaque élève rédige une partie du DM. J'attends donc sur la copie avoir 2 écritures.

Approximation de $\sqrt{3}$: Suite dé Héron d'Alexandrie

Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) = f(u_n)$ avec

$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout n, $u_n > \sqrt{3}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. En déduire la limite ℓ de cette suite.
6. Que se passe-t-il si l'on choisit comme valeur pour u_0 un autre nombre de $]\sqrt{3}\ ;\ +\infty[$?
7. Que se passe-t-il pour $u_0 = \sqrt{3}$?
8. Que se passe-t-il pour $u_0 \in]0\ ;\ \sqrt{3}[$?
9. Proposer un algorithme qui demande à l'utilisateur une valeur de $u_0 > \sqrt{3}$, un nombre p et qui donne le premier rang à partir duquel le terme u_n est une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-p} près.

Facultatif : Non convergence de la suite $\sin(n)$

1. Donner une valeur approchée de $\cos 1$ et $\sin 1$.
2. (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n+1) = \cos(1)\sin(n) + \cos(n)\sin(1).$$

   (b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n).$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(n)$ et $v_n = \cos(n)$.

   On effectue **un raisonnement par l'absurde** en supposant désormais que (u_n) a une limite **finie** ℓ.

   (a) En déduire de la relation établie en 2b) que (v_n) converge et préciser sa limite.

   (b) Déduire alors de la relation établie en 2a) que $\ell = 0$.

   (c) En considérant $u_n^2 + v_n^2$, montrer que

$$\ell^2 = 1.$$

   Qu'en déduit-on ?

   (d) En déduire que la suite $(\sin n)$ n'a pas de limite (finie ou non).